过程性变式与数学学习

顾泠沅　杨玉东

上海市教育科学研究院

聚焦变式教学

- 有关中国人数学学习的悖论
  - IEA、TIMSS、IMO都表明：中国以及其他东亚国家中小学生的数学成绩均显著优于西方学生
  - 西方研究者的调查研究却认为，中国学习者的数学学习环境存在许多缺陷，尤其在教学方式上，属于典型的“被动灌输”和“机械训练”
- 中国传统数学教学的精髓
  - 概念性变式和过程性变式的提出（概念性变式已为大家熟知，这里不作介绍）
  - 尤其是“青浦实验”中的过程性变式教学研究，有助于解读所谓的“悖论”

过程性变式的特征

- 与概念性变式的区别：概念性变式关注的是廓清数学学习对象静态的、整体的、相对稳定的内涵与外延特征；而过程性变式关注的是数学学习对象动态的、内在的层次性递进的过程。因此，对于数学概念、命题推演和问题解决等每一类数学学习对象，均存在着概念性变式和过程性变式。
- 数学活动过程的基本特征是层次性。这种层次性既可以表现为一系列的台阶、也可以表现为某种活动策略或经验。过程性变式的主要教学含义是在数学活动过程中，通过有层次的推进，使学生分步解决问题，积累多种活动经验。

1、数学概念学习

案例：“除法就是分豆子！”

（1）选题背景

Freudenthal研究所的达朗其(Jan de Lange, 1996)在ICME-8的大会报告中介绍了荷兰的一堂课：81名家长出席学校家长会，每张桌子可坐6人，需要布置多少张桌子？第一类学生具体地摆桌子；第二类学生经历了摆桌子到形式计算的抽象；第三类学生套用现成算式去做。实际上，三类学生中只有第二类才经历了具体到形式的抽象、真正体验到了“数学化”的过程。

（2）注重技巧的原行为

①商、余数的“名数”易错易混，因此先要区分包含除与等分除

17(人)÷8(人)=2(桌)……1(人)

17(人)÷2(桌)=8(人)……1(人)

纠缠于枝节，未突出“有余数”这个要点

②“试商”是关键性技巧，因此先要训练括号里最大能填几

6×(　　)<41

13×(　　)<41

技巧性铺垫，未关注试商的实际意义

③最后要学生寻找规律，学生都说“不知道”

16÷5=3……1

17÷5=3……2

18÷5=3……3

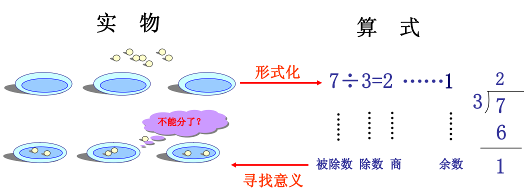
19÷5=3……4

余数(1、2、3、4)与除数(5)比较大小，得出余数小于除数

忘记了对小学生来说“数学就是生活”

（3）注重数学化的新理念

儿童生活经验：“除法就是分豆子”。教师由此得到启发。



学生真实地找出规律：

盘子里试着放几颗 ………… 试商过程

余下的豆子数比盘子数少……… 余数小于除数

（4）创造新行为：脑中分豆子

关注“学生获得”所遇到的困难：

①做除法要“拿豆子来”，只会动手做、不会动脑想。课堂热热闹闹，却陷入了数学教学的浅薄与贫乏。

②学生不会形式化，最后只能记住除法的操作程序。创设情境兜了一大圈，还是回到死读硬记。

教师的创造：

在实物与算式只设置一个中介——放掉豆子和盘子，学生在脑中分豆子，终于越过了形式化的难关。

7颗豆子怎样分在3个盘子里？

学生脑中怎样分？

3个盘子，每盘试放1颗豆子，共放3颗，比7颗少

3个盘子，每盘试放2颗豆子，共放6颗，比7颗少

3个盘子，每盘试放3颗豆子，共放9颗，比7颗多

每盘只能放2颗，这样余下1颗

由此还得出规律：　被除数=除数×商+余数

多好的本原性思考，深奥的“余数定理”在小学就准备了认知的固着点。

（5）分豆子与布鲁纳的认知理论

实物操作 → 表象操作 → 符号操作

分豆子（具体）　　脑中分豆子（半具体、半抽象）　　算式运算（抽象）

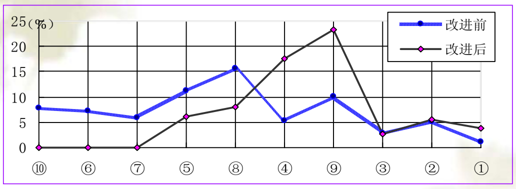
寻找规律

数学是在具体、半具体、半抽象、抽象中间的铺排，是穿梭于实物与算式之间所作的形式化过渡。

（6）让学生发现“余数比除数小”师生语言互动时间分布表

弗兰德师生语言互动分类			改进前(423″)			改进后(410″)		
			时间(″)	百分比(%)	合计	时间(″)	百分比(%)	合计
教师讲	回应	①接纳学生感觉	5	1.2	166″ 39.2%	16	3.9	147″ 35.9%
		②赞许学生行为	22	5.2		23	5.6	
		③接受学生观点	12	2.8		11	2.7	
	中立	④问学生问题	23	5.4		72	17.6	
	自发	⑤演讲	48	11.3		25	6.1	
		⑥指示或命令	31	7.3		0	0	
		⑦批评或辩护权威行为	25	5.9		0	0	
学生讲	回应	⑧回答老师的提问或按老师要求表述	66	15.6	109″ 25.8%	33	8.1	128″ 31.2%
	自发	⑨主动表达自己的观点或向老师提出问题	43	10.2		95	23.2	
静止	中立	⑩静止或疑惑暂时停顿或不理解	33	7.8	7.8%	0	0	0%
小组讨论			115	27.2	27.2%	135	32.9	32.9%

（7）师生语言互动状况及其理念与行为的改变



1. 课堂静止或不理解的时间⑩、教师指示或命令⑥、批评或辩护权威行为⑦在改进课中下降为零；教师演讲⑤、学生按老师要求表述⑧明显减少
2. 教师的提问④、学生主动表达自己的发现的语言⑨在改进课中明显增加；教师接纳学生感觉的语言①也有上升

2、数学命题学习

案例：等腰三角形的判定

（1）选题背景

在几何教学中，学生要学习大量的性质定理、判定定理和公式等。以往的几何学习常常是老师“告诉”定理、公式，给出证明，然后通过练习做机械训练。学生感到枯燥乏味。如何激发学生提出和论证命题的兴趣、如何让从简单到复杂的变式练习成为学生解题能力的练兵场，是日常数学教学中值得关注的问题。

（2）模式化的定理教学

- 复习性质定理、给出判定命题

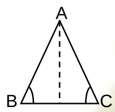
等腰三角形的两个底角相等 → 有两个角相等的三角形是等腰三角形

- 师生进行思路分析

写成已知求证的形式：

已知：在△ABC中，∠B=∠C.

求证：AB=AC

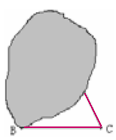


- 通过论证得出定理
- 应用定理做练习

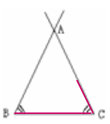
（3）用情境问题引发兴趣

- 如何复原一个被墨迹浸渍的等腰三角形？

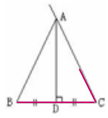
只剩一个底角和一条底边



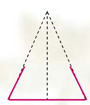
- 学生的三种“补出”方法：



①量出∠C度数，画出∠B=∠C，∠B与∠C的边相交得到顶点A



②作BC边上的中垂线，与∠C的一边相交得到顶点A

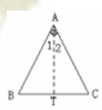


③“对折”

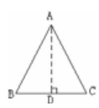
- 画出的是否为等腰三角形，由此引发判定定理的证明

（4）多种证法激活创造力

- 三种常规的办法：



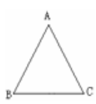
①作∠A的平分线，利用“角角边”



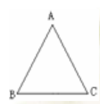
②过A作BC边的垂线，利用“角角边”

③作BC边上的中线，“边边角”不能证明

- 两种创造性的证法：



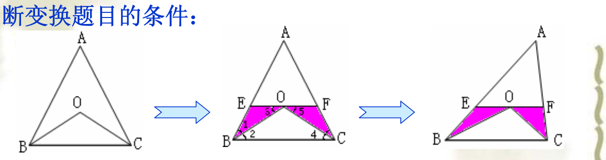
④假定AB>AC，由“大边对大角”得出矛盾



⑤△ABC≌△ACB，应用“角角边”

（5）用变式练习分步解决问题

- 不断变换题目的条件：



△ABC中，∠ABC=∠ACB，BO平分∠B，CO平分∠C。能得出什么结论？	过O作直线EF∥BC。①图中有几个等腰三角形？为什么？②线段EF与线段BE、FC之间有何关系？（学生编题）	若∠B与∠C不相等。①图中有没有等腰三角形？为什么？②线段EF与线段BE、FC之间还有没有关系？（学生讨论）
直观看到一个，简单应用判定定理 →	直观看到三个，两个红色三角形必须应用判定定理论证；线段关系用到性质定理。→	必须综合应用判定定理和性质定理论证两个红色三角形以及线段间的关系

（6）变式教学效果的试验研究

- 一位老教师曾提出质疑，上述最后一题是“总复习”中的难题，在“等腰三角形的判定”第一节课中作为练习，是否超越了学生的学习能力？事实上，运用变式作铺垫，可以明显提高练习的效率。后来这位教师在普通学生的班中亲自做了试验，取得很好效果。
- 我们曾对利用变式图形提高几何教学效果的经验，开展重复试验或轮换试验，结果差别具有显著或极其显著意义（顾泠沅，1991）。

3、数学问题解决学习

案例：勾股定理能够被学生探究出来吗？

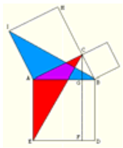
（1）选题背景

$a^2+b^2=c^2$

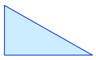
勾股定理是数学教改的晴雨表：上一世纪五六十年代数学课程中的严格论证、后来提倡的“量一量、算一算”、之后的“告诉结论”、“做中学”，直到现在的探究式等。数学教学要培养学生的数学计算、数学论证乃至数学决策等三大能力，勾股定理教学正是一个恰当的例子。

（2）回顾原教学行为

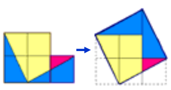
欧几里德方法　（等积变形推导）　技巧难度太高



设置动手情境



“量一量、算一算”　得不出$a^2+b^2=c^2$ ⇒ 提供勾股数组：$3^2+4^2=5^2$　$6^2+8^2=10^2$



“剪一剪、拼一拼”　学生不会剪拼 ⇒ 简化为铺地砖：

特殊情境成了直接暗示，无异于告诉事实

（3）在不满中寻找出路

优秀教师不满足于以往的教学行为。查阅第3次国际数学与科学重复录像研究项目提供的12个勾股定理教学录像，没有获得满意的结果。

尝试新的教学设计，要点是：

①目标在于体现“猜想—证明”这种数学思想方法的本原性意义。

②探究需要“铺垫”（有层次推进的策略）。就像学游泳，不能让所有学生都直接跳到海里，要有一定的背景知识和带关键性的技能、策略作铺垫。铺垫也称“脚手架”，为学生提供一种教学协助，帮助学生完成在现有能力下向高认知学习任务的难度攀升。

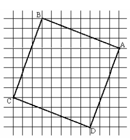
（4）情境铺垫出猜想

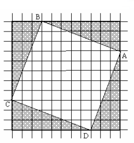
① 问题：直角三角形两条直角边和斜边之间有什么关系?

a、b＜c＜a+b　（已有知识）

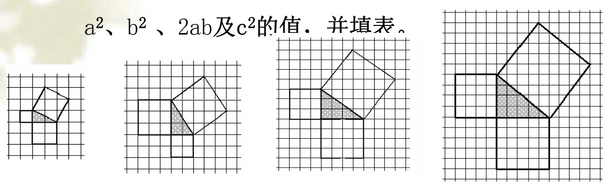
两边平方怎么样?　a^2、$b^2<c^2<$ $(a+b)^2$ / $a^2+2ab+b^2$

② 铺垫：在方格纸内斜放一个正方形ABCD，每个小方格的边长为单位1，怎样计算正方形ABCD的面积?





③ 数据表：用前面的方法分别计算下列四个图形中的a^2、b^2、2ab及c^2的值，并填表。



代数项	图I	图II	图III	图IV	…
a^2	1	4	9	16	
b^2	4	9	16	25	
2ab	4	12	24	40	
c^2	5	13	25	41	

学生的发现出乎意料：

$c^2=2ab+1$　　$a^2+b^2=c^2$

$a+b+a^2=b^2$　　$2ab+c^2=(a+b)^2$等！

（5）反驳与证明的师生对话

[生$_1$] 根据数据表，我得出$c^2=2ab+1$的结论。

[师] [很惊讶]怎么会，不可能吧？

[生$_2$] 我做过a=2，b=4的例子，这时2ab=16，$c^2=20$，$c^2\neq 2ab+1$。

[师] 生$_2$用举例来"反驳"，有说服力，$c^2=2ab+1$这一结论不能成立。

[生$_3$] 老师，当a与b相差1的时候，这个结论还是成立的。

[师] [心中想 $c^2=(a-b)^2+2ab$，b−a=1时，$c^2=2ab+1$]这个意见也是对的，这是一个有条件的结论。好，下面我们来看看另外一个结论$a^2+b^2=c^2$。

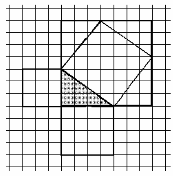
[生$_4$] 这个结论对前面已举过的图例来说都是成立的，但是我想，即使100个例子都正确，101个例子不成立了呢？所有例子都成立才是定理，只要有1个例子不成立还是个有条件的结论。

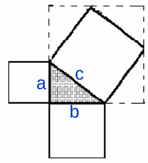
[师] $a^2+b^2=c^2$是否是个定理，举例再多也说明不了，怎么办？

[生$_众$] 看来必须证明。

（6）拆除铺垫引导论证

把图中的小方格背景撤去，并且隐去a、b的具体数值，在一般的直角三角形中，$a^2+b^2=c^2$是否同样成立？学生利用前面计算直角三角形斜边上正方形面积的方法，顺利地证明了这一结论的正确性。





（7）学生活动做扩充

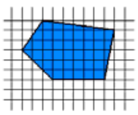
课后，学生的自我扩充活动分三方面展开

① 设计数据表出猜想

② 上网学习勾股定理的史料与多种证明

③ 收集、编拟勾股定理的应用题

如



格点多边形面积

$S=N+\dfrac{L}{2}-1$

（N为内点数，L为边点数）

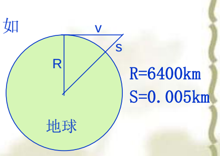
如

中国古代文明

$c^2=2ab+(a-b)^2$

$=a^2+b^2$

如



第一宇宙速度

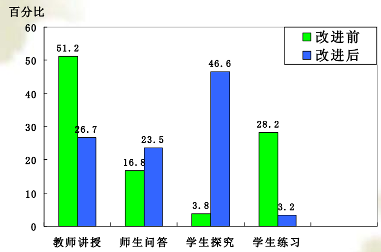
$v^2=(R+s)^2-R^2$

$\approx 2RS$

$=64$

$v=8km$

（8）课堂价值取向与行为类型的变化



• 教师讲授时间减少，学生探索时间明显增加，课堂价值观正向能力取向移动

• 由于探索时间增加，学生课堂练习时间有所减少，但课外思考的空间扩大了

小结：中国教师运用过程性变式的基本特征

- 过程性变式的主要教学含义在于数学活动过程中，通过有层次的推进，使学生逐步形成概念、推演命题或解决问题，从而形成多层次的活动经验系统。这种教学方式并不是一种"机械训练"，而是促进有意义学习的教学手段。
- 过程性变式的功能有四个方面：一是用于概念的形成过程；二是用于数学对象和背景的转换过程；三是用于数学命题的形成过程；四是用于数学问题的解决过程。